Diploma Programme
Programme du diplôme
Programa del Diploma

Mathématiques
Niveau supérieur
Épreuve 2

Vendredi 5 mai 2017 (matin)

Numéro de session du candidat

2 heures

Instructions destinées aux candidats

- Écrivez votre numéro de session dans les cases ci-dessus.
- N'ouvrez pas cette épreuve avant d'y être autorisé(e).
- Une calculatrice à écran graphique est nécessaire pour cette épreuve.
- Section A : répondez à toutes les questions. Rédigez vos réponses dans les cases prévues à cet effet.
- Section B : répondez à toutes les questions sur le livret de réponses prévu à cet effet. Écrivez votre numéro de session sur la première page du livret de réponses, et attachez ce livret à cette épreuve d'examen et à votre page de couverture en utilisant l'attache fournie.
- Sauf indication contraire dans l'intitulé de la question, toutes les réponses numériques devront être exactes ou correctes à trois chiffres significatifs près.
- Un exemplaire non annoté du **livret de formules pour les cours de mathématiques NS et de mathématiques complémentaires NS** est nécessaire pour cette épreuve.
- Le nombre maximum de points pour cette épreuve d'examen est de **[100 points]**.

2217 – 7220

Le total des points ne sera pas nécessairement attribué pour une réponse correcte si le raisonnement n'a pas été indiqué. Les réponses doivent être appuyées par un raisonnement et/ou des explications. En particulier, les solutions obtenues à l'aide d'une calculatrice à écran graphique doivent être accompagnées d'un raisonnement adéquat. Par exemple, si des représentations graphiques sont utilisées pour trouver la solution, veuillez inclure une esquisse de ces représentations graphiques dans votre réponse. Lorsque la réponse est fausse, certains points peuvent être attribués si la méthode utilisée est correcte, pour autant que le raisonnement soit indiqué par écrit. On vous recommande donc de montrer tout votre raisonnement.

Section A

Répondez à **toutes** les questions. Rédigez vos réponses dans les cases prévues à cet effet. Si cela est nécessaire, vous pouvez poursuivre votre raisonnement en dessous des lignes.

1. [Note maximale : 4]

Il y a 75 joueurs d'un club de golf qui prennent part à un tournoi de golf. Les scores obtenus au 18^{e} trou sont indiqués dans le tableau suivant.

Score	2	3	4	5	6	7
Effectifs	3	15	28	17	9	3

(a) Un des joueurs est choisi au hasard. Trouvez la probabilité que le score de ce joueur ait été de 5 ou plus. [2]

(b) Calculez le score moyen. [2]

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

2. [Note maximale : 9]

Considérez la courbe définie par l'équation $4x^2 + y^2 = 7$.

(a) Trouvez l'équation de la normale à la courbe au point $\left(1\,;\ \sqrt{3}\right)$. [6]

(b) Trouvez le volume du solide formé lorsque la région délimitée par la courbe, l'axe des abscisses $\mathrm{O}x$ pour $x \geq 0$ et l'axe des ordonnées $\mathrm{O}y$ pour $y \geq 0$ subit une rotation de 2π autour de l'axe des abscisses $\mathrm{O}x$. [3]

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

3. [Note maximale : 7]

Des paquets de biscuits sont produits par une machine. Les poids X, en grammes, des paquets de biscuits peuvent être modélisés par une distribution normale, où $X \sim \mathrm{N}(\mu, \sigma^2)$. Un paquet de biscuits est considéré comme trop léger si son poids est inférieur à 250 grammes.

(a) Étant donné que $\mu = 253$ et $\sigma = 1{,}5$, trouvez la probabilité qu'un paquet de biscuits choisi au hasard soit trop léger. [2]

Le fabricant décide que la probabilité qu'un paquet soit trop léger doit être de $0{,}002$. Pour y parvenir, μ est augmenté et σ demeure inchangé.

(b) Calculez la nouvelle valeur de μ en donnant votre réponse correcte à deux décimales près. [3]

Le fabricant est satisfait de la décision que la probabilité qu'un paquet soit trop léger doit être de $0{,}002$, mais n'est pas satisfait de la façon dont cela a été réalisé. La machine est maintenant ajustée afin de réduire σ et de ramener μ à 253.

(c) Calculez la nouvelle valeur de σ. [2]

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

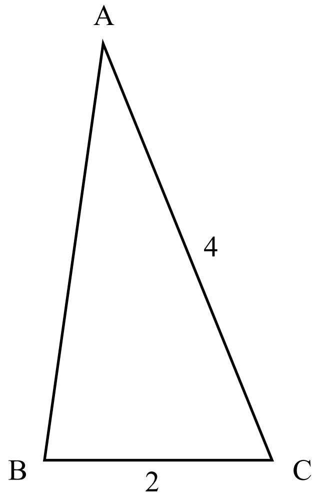
. . . .

. . . .

4. [Note maximale : 6]

(a) Trouvez l'ensemble des valeurs de k qui satisfont l'inéquation $k^2 - k - 12 < 0$. [2]

(b) Le triangle ABC est montré dans le diagramme suivant. Étant donné $\cos B < \frac{1}{4}$, trouvez l'ensemble des valeurs possibles pour AB. [4]



. . . .

5. [Note maximale : 9]

John aime faire de la voile tous les jours du mois de juillet. Pour l'aider à prendre une décision, à savoir s'il peut sortir faire de la voile sans danger, il classe chaque journée de juillet comme venteuse ou calme. Étant donné qu'une journée de juillet est calme, la probabilité que la journée suivante soit calme est de $0,9$. Étant donné qu'une journée de juillet est venteuse, la probabilité que la journée suivante soit calme est de $0,3$. Les prévisions météorologiques pour le 1er juillet indiquent que la probabilité que ce soit une journée calme est de $0,8$.

(a) Dessinez un diagramme en arbre afin de représenter ces informations pour les trois premières journées de juillet. [3]

(b) Trouvez la probabilité que le 3 juillet soit une journée calme. [2]

(c) Trouvez la probabilité que le 1er juillet ait été une journée calme étant donné que le 3 juillet est une journée venteuse. [4]

6. [Note maximale : 5]

Étant donné que $\log_{10}\left(\frac{1}{2\sqrt{2}}(p+2q)\right)=\frac{1}{2}\left(\log_{10} p+\log_{10} q\right)$, $p>0$, $q>0$, trouvez p en fonction de q.

7. [Note maximale : 4]

Étant donné que $\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} = \boldsymbol{b} \times \boldsymbol{c} \neq \boldsymbol{0}$, prouvez que $\boldsymbol{a} + \boldsymbol{c} = s\boldsymbol{b}$ où s est un scalaire.

8. [Note maximale : 6]

Lors d’une session d’examens blancs, un candidat dans un établissement doit passer 18 épreuves d’examen, dont l’épreuve de physique, l’épreuve de chimie et l’épreuve de biologie. Il ne peut pas passer deux de ces trois épreuves de sciences de façon consécutive. Il n’y a aucune restriction quant à l’ordre pour passer les autres épreuves d’examen.

Trouvez le nombre d’ordres différents possibles pour passer ces 18 épreuves d’examen.

N’écrivez **pas** vos solutions sur cette page.

Section B

Répondez à **toutes** les questions sur le livret de réponses fourni. Veuillez répondre à chaque question sur une nouvelle page.

9. [Note maximale : 22]

Les points A, B et C correspondent aux vecteurs-position suivants par rapport à une origine O.

$$\overrightarrow{\mathrm{OA}} = 2\boldsymbol{i} + \boldsymbol{j} - 2\boldsymbol{k}$$

$$\overrightarrow{\mathrm{OB}} = 2\boldsymbol{i} - \boldsymbol{j} + 2\boldsymbol{k}$$

$$\overrightarrow{\mathrm{OC}} = \boldsymbol{i} + 3\boldsymbol{j} + 3\boldsymbol{k}$$

(a) Trouvez l’équation vectorielle de la droite (BC). [3]

(b) Déterminez si les droites (OA) et (BC) sont sécantes ou non. [6]

(c) Trouvez l’équation cartésienne du plan Π_1, qui passe par C et qui est perpendiculaire à $\overrightarrow{\mathrm{OA}}$. [3]

(d) Montrez que la droite (BC) est située dans le plan Π_1. [2]

Le plan Π_2 contient les points O, A et B et le plan Π_3 contient les points O, A et C.

(e) Vérifiez que $2\boldsymbol{j} + \boldsymbol{k}$ est perpendiculaire au plan Π_2. [3]

(f) Trouvez un vecteur perpendiculaire au plan Π_3. [1]

(g) Trouvez l’angle aigu entre les plans Π_2 et Π_3. [4]

N’écrivez **pas** vos solutions sur cette page.

10. [Note maximale : 15]

Une variable aléatoire continue X a comme fonction de densité f donnée par

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2}{a} + b, & 0 \le x \le 4 \\ 0 & \text{autrement} \end{cases}$$ où a et b sont des constantes positives.

On donne $\mathrm{P}(X \ge 2) = 0{,}75$.

(a) Montrez que $a = 32$ et $b = \dfrac{1}{12}$. [5]

(b) Trouvez $\mathrm{E}(X)$. [2]

(c) Trouvez $\mathrm{Var}(X)$. [2]

(d) Trouvez la médiane de X. [3]

On considère maintenant huit observations indépendantes de X et la variable aléatoire Y correspond au nombre d’observations telles que $X \ge 2$.

(e) Trouvez $\mathrm{E}(Y)$. [2]

(f) Trouvez $\mathrm{P}(Y \ge 3)$. [1]

N'écrivez **pas** vos solutions sur cette page.

11. [Note maximale : 13]

On donne $f(x) = 3x^4 + ax^3 + bx^2 - 7x - 4$ où a et b sont des entiers positifs.

(a) Étant donné que $x^2 - 1$ est un facteur de $f(x)$, trouvez la valeur de a et la valeur de b. [4]

(b) Factorisez $f(x)$ en un produit de facteurs linéaires. [3]

(c) Esquissez la représentation graphique de $y = f(x)$, en identifiant les maximums, les minimums et les points d'intersection avec les axes. [3]

(d) En utilisant votre représentation graphique, indiquez l'ensemble des valeurs de c pour lesquelles $f(x) = c$ admet exactement deux racines réelles distinctes. [3]

Veuillez ne **pas** écrire sur cette page.

Les réponses rédigées sur cette page
ne seront pas corrigées.

Veuillez ne **pas** écrire sur cette page.

Les réponses rédigées sur cette page
ne seront pas corrigées.

Veuillez ne **pas** écrire sur cette page.

Les réponses rédigées sur cette page
ne seront pas corrigées.